第27卷 第1期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 1
2010年02月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0001-10

复合条款下的农作物生长指数期权定价公式*

傅 毅， 张寄洲， 王 杨

(上海师范大学数理学院，上海 200234)

摘 要: 本文针对农作物生长的阶段性，研究了在连续扩散的基础上，含有障碍条款以及重置条款的农作物生长指数期权的定价问题。利用投资组合进行对冲，建立了农作物生长指数期权的复合条款模型。通过分阶段计算，得到了相应的定解问题，最后用偏微分方程的理论得到显式的定价公式并给出了数值分析实例。

关键词: 天气期权；复合期权；投资组合；定价公式

分类号: AMS(2000) 35K05 **中图分类号**: O175.2 **文献标识码**: A

1 引言

随着人们对于天气风险认识的更加深刻，特别是在1997年的厄尔尼诺(ElNino)现象之后，迫使许多公司需要对冲其天气风险。1997年天气衍生产品市场应运而生[1]。近年来，天气衍生产品市场迅速扩大，交易量步步攀升。虽然天气衍生产品是一个新生事物，但是在天气期权、天气期货、天气互换等产品的定价上，许多思想都来源于我们所熟知的期权定价。1992年，D'Arcy等在文献[2]中提出了使用灾难期货来保障收益，为天气衍生产品的出现打下了基础。在随后的十几年间，大量的研究者们利用如均衡分析法[3]，影子价格的方法[4]等为天气衍生品进行定价。农作物生长指数期权作为天气衍生产品的一个重要组成部分，主要用于帮助农产品生产经营者应对不利天气，抵御风险，锁定收益。由于农作物生长指数所对应的农作物通常在其生长过程中有多个生长阶段，在不同的生长阶段中，根据交易双方不同的利益需求，期权内往往含有障碍条款和重置条款。

本文针对农作物生长的阶段性，主要研究在连续扩散的基础上，含有障碍条款以及重置条款的农作物生长指数期权的定价问题[5,6]，并建立了农作物生长指数期权的复合条款模型。虽然本文研究的农作物生长指数期权类似于我们所熟知的欧式看涨期权，但由于这类期权的标的是不可交易的温度指数，以及同时考虑其交易费和复合条款，这就相应的提高了定价问题的复杂性。为解决这一问题，本文利用投资组合建立对冲，通过分阶段计算，得到相应的定解问题，最后用建立偏微分方程的方法得到显式的定价公式并给出了数值分析实例。

2 数学模型

2.1 基本假设

收稿日期: 2008-07-21. **作者简介**: 傅毅(1981年11月生)，男，硕士，讲师. 研究方向：金融数学.

***基金项目**: 国家重点基础研究发展计划(973计划)(2007CB814903);上海市科委重大科技攻关项目(075105118);上海市计算数学重点学科和上海师范大学科研项目(SK200933; SK200812).

1) 农作物日生长指数

$$GDD_i = \max\left\{\left(\frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} - h\right), 0\right\},$$

其中 $T_{\max}$ 为当日最高温值，$T_{\min}$ 为当日最低温值，h 为有效期内的标准温值。

2) 农作物生长指数

$$CGDD_i = \sum_{0}^{i} GDD_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \cdots .$$

为简便起见，这里用 S_i 表示农作物生长指数。

3) 本文根据棉花的生长为例。棉花在开花和吐絮之前分为苗期和蕾期两个生长阶段，其中苗期是指棉花从出苗到现蕾的阶段。在长江流域该阶段始于4月，易遭受北方冷空气的侵扰。为保证投资者的收益，合约在这一阶段设计有重置条款。蕾期是指棉花从出蕾到开花的阶段，在长江流域多出现在6月中旬，该阶段的花蕾受温度影响较大，温度过高容易造成棉株死亡。因而为保证棉花生产者的利益，合约在该阶段设置有障碍条款。合约具体条款如下：

将有效期 $[0,T]$ 分为两个阶段：

(a) 在第一阶段 $[0,T_1]$，如果 $S_{T_1} \geq K$，那么在到期日的敲定价为 $K = S_{T_1}$；而当 $S_{T_1} < K$ 时，则敲定价不变；

(b) 在第二阶段 $[T_1,T]$，根据农作物的生长要求，设置障碍为 S_B。若累积生长指数超过这个障碍值，则期权的价值为0。

4) 对于农作物生长指数 S。假定其净值服从几何 Brown 运动

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma_S \mathrm{d}W,$$

这里 μ 表示漂移率，σ_S 表示波动率且均为常数。

5) 支付差额交易费用。差额交易费用可看作是投资者因买卖合约而产生的直接费用，一般由多头支付，并以合约在时段 $[t, t+\delta t]$ 内交易额差额的固定比例 q 来表示，δt 是小量，但不趋于0，此时利率 r 为常数。为了对冲期权所带来的风险，每隔 δt 时段就要调整一次用来对冲的合约的份额 $\delta\Delta$。

6) 假设复合型农作物生长指数期权(下称生长指数期权)的价值 G_t 是关于时间、农作物生长指数的函数，即 $G_t = G(S_t, t)$。

7) 整个市场的各种关于温度的信息都是公开的。

8) 市场利率是无风险利率 r。

2.2 建立方程

在 $[t, t+\delta t]$ 时段内构造投资组合 Π，它由1份生长指数期权 G 和 Δ 份有相同到期日，并且 t 时刻价值为 $M(S_t - B)$ 的合约组成，其中 M 表示赔付率，B 表示生长指数的基准值，且为常数。

$$\Pi_t = G_t - \Delta M(S_t - B).$$

下面为了书写方便，省略下标 t。根据假设条件，结合 Itô 公式的离散形式有

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \delta G - \Delta M\delta S + \Delta M\delta B - qM|\delta S|\,|\delta\Delta| \\ &= \frac{\partial G}{\partial t}\delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma_S^2 S^2\delta t + \frac{\partial G}{\partial S}\delta S - \Delta M\delta S + \Delta M\delta B - qM|\delta S\cdot\delta\Delta|,\end{aligned}$$

其中 $\Delta = \frac{1}{M}\frac{\partial G}{\partial S}$。因保值调整策略而产生的交易费为 $E(qM|\delta S\cdot\delta\Delta|)$。先计算 $|\delta S\cdot\delta\Delta t|$。

$$\begin{aligned}\delta S\cdot\delta\Delta &= \frac{1}{M}\delta S\cdot\Big(\frac{\partial G}{\partial S}(S+\delta S,t+\delta t)-\frac{\partial G}{\partial S}(S,t)\Big)=\frac{1}{M}\delta S\cdot\Big(\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\delta S+O(\delta t)\Big)\\ &= \frac{1}{M}\delta S\cdot\Big(\sigma_S S\Phi\sqrt{\delta t}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}+O(\delta t)\Big)\approx\frac{1}{M}\sigma_S^2S^2\Phi^2\delta t\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}+O(\delta t^{\frac{3}{2}}),\end{aligned}$$

其中 $\Phi\sim N(0,1)$。此时，可以计算交易费用的数学期望

$$E\big(qM|\delta S\cdot\delta\Delta|\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}qM\cdot\frac{1}{M}\sigma_S^2S^2\delta t\Big|\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\Big|x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\approx q\sigma_S^2S^2\delta t\Big|\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\Big|.$$

由此上述 $\delta\Pi$ 的数学期望为

$$E(\delta\Pi)=\frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sigma_S^2S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\mathrm{d}t+\frac{\partial G}{\partial S}\mathrm{d}B-q\sigma_S^2S^2\Big|\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\Big|\mathrm{d}t.$$

根据无套利原理，此时

$$E(\delta\Pi)=r\Pi\delta t=r\big[G-\Delta M(S-B)\big]\delta t.$$

由于 $\mathrm{d}B=rB\mathrm{d}t$，整理得

$$\frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sigma_S^2S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\mathrm{d}t+\frac{\partial G}{\partial S}\mathrm{d}B-q\sigma_S^2S^2\Big|\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\Big|\mathrm{d}t=r\Big(G-\frac{\partial G}{\partial S}S+\frac{\partial G}{\partial S}B\Big)\mathrm{d}t.$$

$\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}$ 称为 γ 保值因子，对于多头而言，γ 为正，而对空头，γ 始终为负。故结合 $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}$ 的值，上述生长指数期权的定价方程为

$$LG=\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}+rS\frac{\partial G}{\partial S}-rG=0.$$

其中 $\sigma^2=\sigma_S^2-q\sigma_S^2=(1-q)\sigma_S^2$。

3 定解问题

为使计算简便，取 $M=1$。在 $[T_1,T]$ 时间内，考虑下面两种情况。

(a) 若 $S_{T_1}<K$，则到期时敲定价不变。在这个阶段内一旦温度指数大于该阶段的障碍 S_B，则生长指数期权价值为零。在 $D_2:0\le S\le S_B$，$T_1\le t\le T$ 内定解问题为

$$\begin{cases}LG_a=0,\\ G_a(S_B,t)=0,\\ G_a(S,T)=(S-K)^+,\quad 0\le S\le S_B.\end{cases}\tag{1}$$

(b) 若 $S_{T_1}\geqslant K$，到期时的敲定价为 S_{T_1}。在这个阶段内一旦温度指数大于该阶段的障碍 S_B，则生长指数期权价值为零。在 $D_2:0\le S\le S_B$，$T_1\le t\le T$ 内定解问题为

$$\begin{cases}LG_b=0,\\ G_b(S_B,t)=0,\\ G_b(S,T)=(S-S_{T_1})^+,\quad 0\le S\le S_B.\end{cases}$$

在 $D_1: 0 \leq S \leq +\infty,\ 0 \leq t \leq T_1$ 内，根据 S_{T_1} 特殊性可以得到如下的定解问题

$$\begin{cases} LG_c = 0, \\ G_c(S,T_1) = G_a(S,T_1+0)I\{S_{T_1} < K\} + G_b(S,T_1+0)I\{S_{T_1} \geqslant K\}. \end{cases} \tag{2}$$

首先考虑定解问题 (1)。令

$$x = \ln\frac{S_B}{S}, \quad G_a = S_B u, \quad K_B = \frac{K}{S_B},$$

可得

$$\frac{\partial G_a}{\partial S} = -\frac{S_B}{S}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 G_a}{\partial S^2} = \frac{S_B}{S^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{S_B}{S^2}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

于是可将定解问题 (1) 转化为如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)\frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0, & x \in R, \quad T_1 \leq t \leq T, \\ u(x,T) = (\mathrm{e}^{-x} - K_B), & 0 < x < +\infty, \\ u(0,t) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

对定解问题 (3) 做函数代换，令 $u = \mathrm{e}^{\alpha_1 x + \beta_1 (T-t)}W$，其中

$$\alpha_1 = -\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma^2}, \quad \beta_1 = -r - \frac{1}{2\sigma^2}\Big(\frac{\sigma^2}{2} - r\Big)^2.$$

则定解问题 (3) 转化为如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \\ W(x,T) = \mathrm{e}^{-\alpha_1 x}(\mathrm{e}^{-x} - K_B), \\ W(0,t) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

为求此方程，作奇延拓

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha_1 x}(\mathrm{e}^{-x} - K_B)^+, & x > 0, \\ -\mathrm{e}^{\alpha_1 x}(\mathrm{e}^{x} - K_B)^+, & x < 0. \end{cases}$$

则问题 (4) 转化为

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \\ W(x,T) = \varphi(x). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W(x,t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{0}^{+\infty} \Big[\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\Big]\mathrm{e}^{-\alpha_1\xi}(\mathrm{e}^{-\xi} - K_B)^+\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

回到函数$u(x,t)$，得到

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{-\ln K_B}\mathrm{e}^{-\frac{[(x-\xi)+(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}}(\mathrm{e}^{-\xi}-K_B)\mathrm{d}\xi \\
&\quad -\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}-\frac{2}{\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2}-r)x}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{-\ln K_B}\mathrm{e}^{-\frac{[(x+\xi)-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}}(\mathrm{e}^{-\xi}-K_B)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x+\ln K_B-(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\frac{x-(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega-K_B\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x+\ln K_B+(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\frac{x+(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega \\
&\quad -\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{\sigma^2}rx}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x+(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\frac{x-\ln K_B+(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega \\
&\quad +K_B\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)-\frac{2}{\sigma^2}(\frac{\sigma^2}{2}-r)x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\frac{x-\ln K_B-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

令

$$
d_1=\frac{\ln\frac{S_B}{S}-(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=\frac{\ln\frac{K}{S}-(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_3=d_1+\sigma\sqrt{T-t},
$$

$$
d_4=d_2+\sigma\sqrt{T-t},\quad d_5=\frac{\ln\frac{S_B^2}{K\cdot S}+(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_6=\frac{\ln\frac{S_B}{S}+(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},
$$

$$
d_7=d_5-\sigma\sqrt{T-t},\quad d_8=d_6-\sigma\sqrt{T-t}.
$$

因此将变量替换为最初的变量可得$G_a(S,t)$的最终结果

$$
\begin{aligned}
G_a(S,t) &= S\big[N(d_1)-N(d_2)\big]-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\big[N(d_3)-N(d_4)\big] \\
&\quad -S_B\Big(\frac{S_B}{S}\Big)^{\frac{2}{\sigma^2}r}\big[N(d_5)-N(d_6)\big]+K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Big(\frac{S_B}{S}\Big)^{-1+\frac{2}{\sigma^2}r}\big[N(d_7)-N(d_8)\big].
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
G_b(S,t) &= S\big[N(d_1)-N(d_2^*)\big]-S_{T_1}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\big[N(d_3)-N(d_4^*)\big] \\
&\quad -S_B\Big(\frac{S_B}{S}\Big)^{\frac{2}{\sigma^2}r}\big[N(d_5^*)-N(d_6)\big]+S_{T_1}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Big(\frac{S_B}{S}\Big)^{-1+\frac{2}{\sigma^2}r}\big[N(d_7^*)-N(d_8)\big].
\end{aligned}
$$

其中

$$
d_2^*=\frac{\ln\frac{S_{T_1}}{S}-(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_4^*=d_2^*+\sigma\sqrt{T-t},
$$

$$
d_5^*=\frac{\ln\frac{S_B^2}{S_{T_1}\cdot S}+(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_7^*=d_5^*-\sigma\sqrt{T-t}.
$$

接下来考虑定解问题 (2)，令

$$x=\ln S,\quad \tau=T_1-t,\quad G_c=u\mathrm{e}^{\alpha x+\beta\tau},\quad \alpha=\frac{\frac{1}{2}\sigma^2-r}{\sigma^2},\quad \beta=-r-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\frac{\sigma^2}{2}-r\Big)^2.$$

则原定解问题可以转化为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u(x,0)=\mathrm{e}^{-\alpha x}\big[G_a(\mathrm{e}^x,0)I\{x_0<\ln K\}+G_b(\mathrm{e}^x,0)I\{x_0\geqslant\ln K\}\big]. \end{cases}$$

根据热传导方程可求解 $u(x,\tau)$

$$\begin{aligned} u(x,\tau)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}}u(\xi,0)\mathrm{d}\xi\\ &=\int_{-\infty}^{\ln K}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}}\mathrm{e}^{-\alpha\xi}G_a(\mathrm{e}^\xi,0)\mathrm{d}\xi+\int_{\ln K}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}}\mathrm{e}^{-\alpha\xi}G_b(\mathrm{e}^\xi,0)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

将 τ 代回得

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\int_{-\infty}^{\ln K}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T_1-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T_1-t)}}\mathrm{e}^{-\alpha\xi}G_a(\mathrm{e}^\xi,0)\mathrm{d}\xi\\ &\quad+\int_{\ln K}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T_1-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T_1-t)}}\mathrm{e}^{-\alpha\xi}G_b(\mathrm{e}^\xi,0)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}\tag{5}$$

为求解上述积分式，根据 G_a, G_b 的具体形式，首先计算如下的积分

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\ln K}\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{(T_1-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T_1-t)}}\mathrm{e}^{-\alpha\xi}\mathrm{e}^{\xi}N(d_1)\mathrm{d}\xi\\ =&\ \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{T_1-t}}\mathrm{e}^{\frac{2x(r+\frac{\sigma^2}{2})+(r+\frac{\sigma^2}{2})^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\ln K}\mathrm{e}^{-\frac{[(\xi-x)-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)]^2}{2\sigma^2(T_1-t)}}\int_{-\infty}^{d_1(\xi)}\mathrm{e}^{-\frac{m^2}{2}}\mathrm{d}m\mathrm{d}\xi. \end{aligned}\tag{6}$$

令

$$y=\frac{(\xi-x)-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}},$$

可得

$$d_1=\frac{(\ln S_B-\xi)-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-T_1)}{\sigma\sqrt{T-T_1}},\quad \xi=\sigma y\sqrt{T_1-t}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)+x.$$

取

$$m_1=\frac{m\sqrt{T-T_1}+y\sqrt{T_1-t}}{\sqrt{T-t}},$$

则

$$\sqrt{\frac{T-t}{T-T_1}}\mathrm{d}m_1=\mathrm{d}m.$$

令 $\rho=\sqrt{\frac{T_1-t}{T-t}}$，可得

$$\sqrt{\frac{T-t}{T-T_1}}=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

再令

$$b_1=\frac{(\ln S_B-x)+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

根据如上的这些变换，则积分 (6) 等于

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\frac{2x(r+\frac{\sigma^2}{2})+(r+\frac{\sigma^2}{2})^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{a_1}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{b_1}\mathrm{e}^{-\frac{m_1^2-2\rho m_1y+y^2}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}m_1\\ =\ &\mathrm{e}^{\frac{2x(r+\frac{\sigma^2}{2})+(r+\frac{\sigma^2}{2})^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}M(a_1,b_1,\rho).\end{aligned}$$

同理，(5) 的第一个积分得

$$\begin{aligned}F_1(x,t)\ =\ &\mathrm{e}^{\frac{2x(r+\frac{\sigma^2}{2})+(r+\frac{\sigma^2}{2})^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}\big[M(a_1,b_1,\rho)-M(a_2,b_2,\rho)\big]\\ &-K\mathrm{e}^{-r(T-T_1)+\frac{-2x(\frac{\sigma^2}{2}-r)+(\frac{\sigma^2}{2}-r)^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}\big[M(a_3,b_3,\rho)-M(a_4,b_4,\rho)\big]\\ &-S_B^{(1+\frac{2r}{\sigma^2})}\mathrm{e}^{\frac{2x(r+\frac{\sigma^2}{2})+(r+\frac{\sigma^2}{2})^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}\big[M(a_5,b_5,\rho)-M(a_6,b_6,\rho)\big]\\ &+KS_B^{(1+\frac{2r}{\sigma^2})}\mathrm{e}^{-r(T-T_1)+\frac{-2x(\frac{\sigma^2}{2}-r)+(\frac{\sigma^2}{2}-r)^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}\big[M(a_7,b_7,\rho)-M(a_8,b_8,\rho)\big].\end{aligned}$$

公式 (5) 的第二个积分得

$$\begin{aligned}F_2(x,t)\ =\ &\mathrm{e}^{\frac{2x(r+\frac{\sigma^2}{2})+(r+\frac{\sigma^2}{2})^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}\big[M(p_1,q_1,\rho)-N(q_2)N(p_2)\big]\\ &-K\mathrm{e}^{-r(T-T_1)+\frac{-2x(\frac{\sigma^2}{2}+r)+(\frac{\sigma^2}{2}+r)^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}\big[M(p_3,q_3,\rho)-N(q_4)N(p_4)\big]\\ &-S_B^{(1+\frac{2r}{\sigma^2})}\mathrm{e}^{\frac{-2x(r+\frac{\sigma^2}{2})+(r+\frac{\sigma^2}{2})^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}\big[M(p_5,q_5,\tilde{\rho})-M(p_6,q_6,\rho)\big]\\ &+S_B^{(-1+\frac{2r}{\sigma^2})}\mathrm{e}^{-r(T-T_1)+\frac{2x(\frac{3\sigma^2}{2}-r)+(\frac{3\sigma^2}{2}-r)^2(T_1-t)}{2\sigma^2}}\big[M(p_7,q_7,\tilde{\rho})-M(p_8,q_8,\rho)\big].\end{aligned}$$

其中

$$a_1=\frac{\ln K-x-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}},\quad b_1=\frac{\ln S_B-x+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$a_2=a_1,\quad b_2=\frac{\ln K-x+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad a_3=\frac{\ln K-x+(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}},$$

$$b_3=\frac{\ln S_B-x+(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad a_4=a_3,\quad b_4=\frac{\ln K-x+(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$a_5=\frac{\ln K-x+(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}},\quad b_5=\frac{\ln\frac{S_B^2}{K}-x+(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$a_6=a_5,\quad b_6=\frac{\ln S_B-x+(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad a_7=\frac{\ln K-x-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}},$$

$$b_7=\frac{\ln\frac{S_B^2}{K}-x-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad a_8=a_7,\quad b_8=\frac{\ln S_B-x-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$p_1=\frac{x-\ln K+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}},\quad q_1=\frac{\ln S_B-x-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$p_2=p_1,\quad q_2=\frac{-(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-T_1)}{\sigma\sqrt{T-T_1}},\quad p_3=p_1,\quad q_3=\frac{\ln S_B-x+(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$p_4=p_3,\quad q_4=\frac{(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-T_1)}{\sigma\sqrt{T-T_1}},\quad p_5=\frac{x-\ln K-(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}},$$

$$q_5=\frac{2\ln S_B-2x+(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t+T_1-t)}{\sigma\sqrt{4(T_1-t)+(T-T_1)}},$$

$$p_6=p_5,\quad q_6=\frac{\ln S_B-x+(\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)+(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-T_1)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$p_7=\frac{x-\ln K+(\frac{3\sigma^2}{2}-r)(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}},\quad q_7=\frac{2\ln S_B-2x-(3\sigma^2-2r)(T_1-t)-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-T_1)}{\sigma\sqrt{T-T_1}},$$

$$p_8=p_7,\quad q_8=\frac{\ln S_B-x-(\frac{3\sigma^2}{2}-r)(T_1-t)-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-T_1)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\rho=\sqrt{\frac{T_1-t}{T-t}},\quad \tilde{\rho}=\frac{-2\sqrt{T_1-t}}{\sqrt{4(T_1-t)+(T-T_1)}}.$$

因此，在时间段 $[0,T_1]$ 上复合型农作物生长指数期权的定价公式为

$$G_c(S,t)=\mathrm{e}^{\alpha\ln S+\beta(T_1-t)}\big[F_1(\ln S,t)+F_2(\ln S,t)\big].$$

将上述两个阶段的解联合起来，即得在 $D:\{0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant S<\infty\}$ 上的解为

$$G(S,t)=\begin{cases}G_a(S,t), & S_{T_1}<K,\quad T_1\le t\le T,\quad 0\le S\le S_B,\\ G_b(S,t), & S_{T_1}\ge K,\quad T_1\le t\le T,\quad 0\le S\le S_B,\\ G_c(S,t), & 0\le t\le T_1,\quad 0\le S<+\infty.\end{cases}$$

4 数值分析举例

我们根据大豆的生长情况，在五月初至八月底的120天内，以天为单位，取温度指数波动率 $\sigma=0.04$，日利率 $r=0.0001$，敲定价为800，障碍值为1200，$T=120$, $T_1=60$。首先我们观察在 $C_1:\{S_{T_1}<K, T_1\le t\le T, 0\le S\le S_B\}$ 范围内的 G_a。在图1中，期权的价值在同一时间轴上，起初随着温度指数的增加而增加，但是随着指数增长到1200附近时，由于受到障碍值的影响，期权价值迅速向0回落。同时，在同一指数轴上，当指数大于敲定价

而小于障碍值时，随着时间t的增长，期权面临的风险在逐步减少，期权的价格逐步上升。在$C_2:\{S_{T_1}\geq K, T_1\leq t\leq T, 0\leq S\leq S_B\}$范围内，我们假设$S_{T_1}=900$，虽然$G_b$的表现基本与$G_a$类似，但是由于重置后敲定价高于$K$，所以获利空间缩小，期权的价值也相应较小，见图2。

最后我们观察在$C_3:\{0\leq t\leq T_1, 0\leq S<+\infty\}$范围内的$G_c$。在同一时间轴上，由于是看涨期权且此处所研究的指数上限远低于障碍值，敲出风险较小，所以随着指数的上涨，期权的价格也随之上涨。特别在时间点60附近，随着指数在小于敲定价范围内的上涨，此时该期权向上重置的风险较小，又存在着指数上涨获利的预期，期权价格有较明显的上升。同时由于受到后期重置、障碍的双重获利约束，期权较前两个阶段而言，获利空间较小，所以期权价值相对较低，这些情况与实际市场情况比较吻合，见图3。

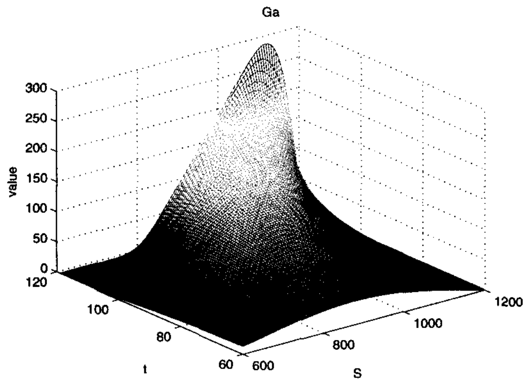

图 1: G_a 的图像

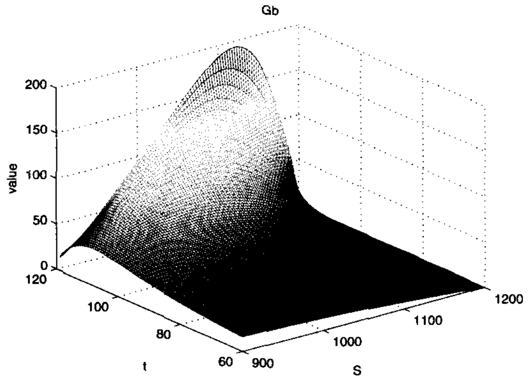

图 2: G_b 的图像

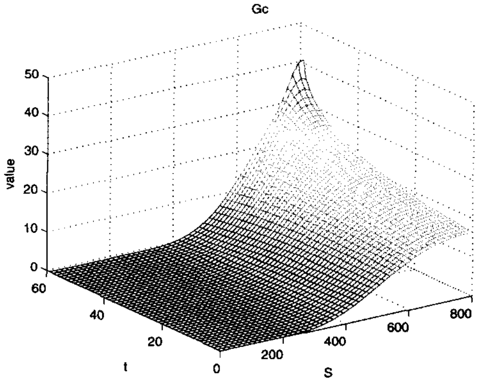

图 3: G_c 的图像

5 结论

本文讨论了包含障碍、重置两种合约条款，与农作物生长指数挂钩的复合型农作物生长指数期权的的定价模型，利用对冲和Itô公式构造定解问题，并最终利用PDE的方法得到了定解问题的显式解。在这个基础上，我们可以进一步得到两次以上的障碍或重置期权，但这样的结果要复杂得多。

参考文献：

[1] 埃里克·班克斯. 天气风险管理—市场、产品和应用 (中文版，李国华译)[M]. 北京：经济管理出版社，2004
Banks Erik. Weather Risk Management: Markets, Products and Applications (Chinese, translated by Li Guohua)[M]. Beijing: Economic Management Publishing House, 2004

[2] D'Arcy, Stephen P, Virginia Grace France. Catastrophe futures: a better hedge for insurers[J]. Journal of Risk and Insurance, 1992, 59: 575-600

[3] Cao M, Wei J. Pricing weather derivatives: an equilibrium approach[R]. Working paper, Dept of Economics, Queen's University, Kingston Ontario, 1999

[4] Davis Mark. Pricing weather derivatives by marginal value[J]. Quantitative Finance, 2001, 1: 305-308

[5] Dai Min, Yue Kuen Kwok. Options with combined reset rights on strike and maturity[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2005, 29: 1495-1515

[6] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京：高等教育出版社，2003
Jiang L S. Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003

The Pricing of Cumulate Growing Degree Day Options with Compounding Items

FU Yi, ZHANG Ji-zhou, WANG Yang

(College of Mathematics and Sciences, Shanghai Normal University, Shanghai 200234)

Abstract: In this paper, we discuss the option pricing model of the cumulate growing degree day with the obstacle items and resetting items on the basis of a continuous diffusion. By means of portfolio hedging, a model of the cumulate growing degree day option is established. The corresponding solution is obtained by a stage-wise calculation. Finally, a obvious pricing formula is obtained by the method of PDE, and a practical numerical example is given.

Keywords: weather option; compounding option; portfolio; pricing formula

Received: 21 July 2008. **Accepted:** 26 Feb 2009.

Foundation item: The National Basic Research Program of China (973 Program) 2007CB814903; the Science and Technology Commission of Shanghai Municipality (075105118); the Leading Academic Discipline Project of Shanghai Normal University (DZL707) and the Scientific Research Project of Shanghai Normal University (SK200933; SK200812).